

USPOREDBA SHEMA INTERPOLACIJE KVAZI-2D MODELA HIDRAULIČKOG UDARA

Korbar, R., Korade, I., & Mustapić, N.

Sažetak: Najtočniji model hidrauličkog udara koji se u praksi koristi je kvazi-dvodimenzijски. Ukoliko se za rješavanje tog modela, u okviru metode karakteristika, koristi isključivo implicitna shema vremenske interpolacije, postupak rješavanja znatno se skraćuje. Ovdje su uspoređeni rezultati dobiveni korištenjem implicitne i mješovitih shema s eksperimentalnima. Implicitna shema pokazala se superiornijom.

Abstract: The most accurate practical model of water hammer is the quasi two-dimensional model. The solution procedure for this model becomes substantially shorter, if the implicit time interpolation scheme is used within the method of characteristics. Here, the results obtained using implicit and mixed schemes are compared with experimental results. The implicit scheme proved to be superior.

Ključne riječi: hidraulički udar, interpolacijska shema, nestacionarno strujanje, strujanje u cijevi

1. UVOD

Zbog razvitka tehnologije i civilizacije problemi nestacionarnog strujanja fluida postaju sve značajniji u širokom području, od cjevovoda za transport i opskrbu fluida do strujanja u krvožilnom sustavu. Sve češće potrebno je obračunati i gubitke energije, tj. uzeti u obzir trenje, a točnost proračuna trenja znatno zavisi od složenosti modela hidrauličkog udara. Potrebna točnost modela odabire se prema potrebama zadatka i parametrima ispitivane pojave. Pri odabiru modela hidrauličkog udara značajnu ulogu ima brzina proračuna. Zato se modele u pravilu nastoji maksimalno pojednostaviti.

Kvazi-dvodimenzijски (2D) model predstavlja najtočniji model koji se u praksi koristi za simulaciju hidrauličkog udara. Zbog složenosti, najčešće se koristi za verifikaciju jednostavnijih jednodimenzijских (1D) modela, a rjeđe za komercijalnu simulaciju. Metoda [3] rješavanja kvazi-2D modela hidrauličkog udara u cijevi brža je i jednostavnija od starijih srodnih metoda [4] i [5], ali zahtijeva korištenje implicitne sheme vremenske interpolacije radijalne brzine.

U ovom radu pokazuje se da ograničavanje na korištenje isključivo implicitne sheme ne kvari točnost rješenja. To se pokazuje usporedbom rješenja dobivenih primjenom implicitne i mješovitih shema interpolacije, za dvije situacije hidrauličkog udara za koje postoje eksperimentalni podaci [1]. Pokazalo se i da bezuvjetna stabilnost implicitne sheme predstavlja značajnu prednost u odnosu na ostale sheme koje dovode do nestabilnosti postupka rješavanja.

2. MATEMATIČKI MODEL

Kad se uvedu sljedeće pretpostavke:

- aksijalna simetrija,
- 1D polje tlaka, tj. $P=P(x,t)$,
- zanemariv utjecaj svih konvektivnih članova,
- Boussinesqova hipoteza za turbulentno strujanje,

jednadžba kontinuiteta i jednadžba količine gibanja za nestacionarno strujanje slabo stlačivog fluida u cilindarskim koordinatama glase

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\rho c^2}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r}, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r v_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (2)$$

pri čemu je t =vrijeme; x =koordinata duž osi cijevi; r =radijalna udaljenost od osi cijevi; $P(x,t)$ =tlak; $u(x,r,t)$ =aksijalna brzina; $v(x,r,t)$ =radijalna brzina; ρ =gustoća; c =brzina zvuka; v_{ef} =efektivna kinematička viskoznost (laminarna + turbulentna viskoznost). Uz ovaj kvazi-2D model uspješno se u [4] koristi pet-zonski model turbulencije [2], pa je isti model turbulencije primijenjen i u ovom radu.

Rubni uvjeti

Stacionarno strujanje u cijevi predstavlja početni uvjet. U radu se koriste četiri tipa rubnih uvjeta:

- 1) *Spremnik*. U cijevi, neposredno uz spremnik pretpostavlja se konstantni tlak P_0 i radijalna brzina jednaka nuli
- 2) *Zatvoreni ventil*. Aksijalna brzina uz ventil jednaka je nuli.
- 3) *Stijenka cijevi*. Aksijalna i radijalna komponenta brzine jednake su nuli.
- 4) *Os simetrije*. Radijalna brzina i promjena aksijalne brzine u radijalnom smjeru jednake su nuli.

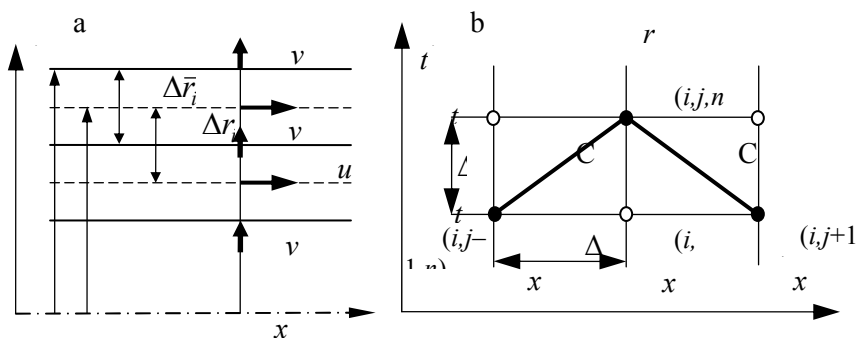
3. NUMERIČKA METODA

Kvazi-2D model (1), (2) integrira se metodom karakteristika. Domena (cijev) podijeljena je na N_r cilindara različite širine (vidi sl. 1a). Čvorovi u kojima se računa aksijalna brzina u smješteni su na sredini cilindara, dok su čvorovi u kojima se računa radijalna brzina v smješteni na rubovima cilindara. U aksijalnom smjeru područje je podijeljeno na N_x jednakih koraka duljine $\Delta x = c\Delta t$ (vidi sl. 1b) tako da je Courantov br. točno jednak jedinici. Na sl. 1b) čvorovi su označeni indeksima i, j i n , pri čemu i =indeks radijalnog koraka, j =indeks aksijalnog koraka, n =indeks vremenskog koraka, dok su pozitivna i negativna karakteristična krivulja označene sa C^+ i C^- .

Model se integrira po presjeku (dobiva se 1D model), pa se primjenom metode karakteristika dobiva sljedeća diskretizirana jednadžba za tlak

$$P_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[P_{j-1}^n + P_{j+1}^n + \rho c (U_{j-1}^n - U_{j+1}^n) \right] + (1 - \varepsilon) \frac{c\Delta t}{R} \left[(\tau_w)_{j-1}^n - (\tau_w)_{j+1}^n \right], \quad (3)$$

pri čemu je $U(x,t)$ =srednja brzina po presjeku, $\tau_w(x,t)$ =smično naprezanje na stijenci cijevi, ε =parametar za odabir vremenske interpolacijske sheme za trenje ($0 \leq \varepsilon \leq 1$; eksplisitna: $\varepsilon=0$; implicitna: $\varepsilon=1$), Δt =vremenski korak, R =polumjer cijevi.



Sl. 1 a) Princip podjele mreže u radijalnom smjeru;
b) Princip podjele mreže pri $r=\text{const}$.

Ista jednačba može se dobiti i numeričkom integracijom diskretiziranih jednačbi iz [4], što znači da se u suštini radi o algebarskoj manipulaciji jednih te istih jednačbi. Nakon što se na taj način odredi tlak, u svakom presjeku cijevi potrebno je riješiti sljedeći trodijagonalni sustav linearnih jednačbi za aksijalnu brzinu u

$$\begin{aligned}
 u_{i,j}^{n+1} - \frac{\varepsilon \Delta t}{\bar{r}_i \Delta r_{i-1}} \left[r_i (v_{ef})_{i,j}^n \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{\Delta \bar{r}_i} - r_{i-1} (v_{ef})_{i-1,j}^n \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \bar{r}_{i-1}} \right] = \\
 = \frac{1}{2} \left[u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n + \frac{P_{j-1}^n - P_{j+1}^n}{\rho c} \right] + \\
 + (1 - \varepsilon) \frac{\Delta t}{2 \bar{r}_i \Delta r_{i-1}} \left[r_i (v_{ef})_{i,j-1}^n \frac{u_{i+1,j-1}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta \bar{r}_i} - r_{i-1} (v_{ef})_{i-1,j-1}^n \frac{u_{i,j-1}^n - u_{i-1,j-1}^n}{\Delta \bar{r}_{i-1}} \right] +, \quad (4) \\
 + (1 - \varepsilon) \frac{\Delta t}{2 \bar{r}_i \Delta r_{i-1}} \left[r_i (v_{ef})_{i,j+1}^n \frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i,j+1}^n}{\Delta \bar{r}_i} - r_{i-1} (v_{ef})_{i-1,j+1}^n \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i-1,j+1}^n}{\Delta \bar{r}_{i-1}} \right] - \\
 - \frac{(1 - \theta) c \Delta t}{2 \bar{r}_i \Delta r_{i-1}} (r_i v_{i,j-1}^n - r_{i-1} v_{i-1,j-1}^n - r_i v_{i,j+1}^n + r_{i-1} v_{i-1,j+1}^n)
 \end{aligned}$$

gdje je θ =parametar za odabir vremenske interpolacijske sheme za radijalnu brzinu ($0 \leq \theta \leq 1$), dok se sustav jednačbi za radijalnu brzinu v

$$\begin{aligned}
 \frac{P_j^{n+1}}{\rho c} + \frac{\theta c \Delta t}{\bar{r}_i \Delta r_{i-1}} (r_i v_{i,j}^{n+1} - r_{i-1} v_{i-1,j}^{n+1}) = \frac{1}{2} \left[\frac{P_{j-1}^n + P_{j+1}^n}{\rho c} + u_{i,j-1}^n - u_{i,j+1}^n \right] + \\
 + (1 - \varepsilon) \frac{\Delta t}{2 \bar{r}_i \Delta r_{i-1}} \left[r_i (v_{ef})_{i,j-1}^n \frac{u_{i+1,j-1}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta \bar{r}_i} - r_{i-1} (v_{ef})_{i-1,j-1}^n \frac{u_{i,j-1}^n - u_{i-1,j-1}^n}{\Delta \bar{r}_{i-1}} \right] - \\
 - (1 - \varepsilon) \frac{\Delta t}{2 \bar{r}_i \Delta r_{i-1}} \left[r_i (v_{ef})_{i,j+1}^n \frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i,j+1}^n}{\Delta \bar{r}_i} - r_{i-1} (v_{ef})_{i-1,j+1}^n \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i-1,j+1}^n}{\Delta \bar{r}_{i-1}} \right] - \\
 - (1 - \theta) \frac{c \Delta t}{2 \bar{r}_i \Delta r_{i-1}} (r_i v_{i,j-1}^n - r_{i-1} v_{i-1,j-1}^n + r_i v_{i,j+1}^n - r_{i-1} v_{i-1,j+1}^n)
 \end{aligned} \quad (5)$$

rješava se eksplicitno. U ovom radu opisani postupak proračuna koristi se.

Eksplicitna shema vremenske interpolacije je ona u kojoj se vrijednosti izvorskih članova uzimaju u starom vremenskom trenutku, tj. u točkama $(i,j-1,n)$ i $(i,j+1,n)$. U implicitnoj shemi uzimaju se u novom vremenskom trenutku, tj. u točki $(i,j,n+1)$, dok se u mješovitoj shemi uzimaju vrijednosti na karakterističnim krivuljama C^+ i C^- interpolirane u nekom trenutku između tih krajnjih trenutaka.

Ako se odabere samo implicitna vremenska interpolacija za radijalnu brzinu (tj. $\theta=1$), uklanja se radijalna brzina v iz sustava jednažbi (3), (4), tako da za određivanje tlaka P i aksijalne brzine u uopće nije potrebno rješavati sustav (5) za radijalnu brzinu v . Odabirom implicitne vremenske interpolacije za trenje (tj. $\varepsilon=1$), jednažbe (3), (4) dodatno se još znatno pojednostavljaju. Ovakav pojednostavljeni proračun prvi puta je primijenjen u [3], dok se u ovom radu istražuje utjecaj tog pojednostavljenja, tj. točnost implicitne u odnosu na druge sheme.

5) REZULTATI

Proračunski tlakovi dobiveni korištenjem implicitne ($\varepsilon=1$, $\theta=1$), i mješovitih shema ($0<\varepsilon<1$, $0<\theta<1$) uspoređeni su s rezultatima eksperimenta za dvije strujne situacije opisane u [1], u kojima je početno stacionarno strujanje laminarno (Reynoldsov br. $Re=82$) odn. turbulentno ($Re=6132$). Ispitni uređaj sastojao se od krute cijevi postavljene između spremnika s konstantnim tlakom P_0 na početku cijevi i brzo-zatvarajućeg ventila na njenom kraju. Osjetnici tlaka bili su postavljeni na kraju i na sredini duljine cijevi. Hidraulički udar ostvario se tako da se u režimu stacionarnog strujanja praktički trenutačno zatvorio ventil. S proračunom su uspoređeni rezultati dobiveni na sredini duljine cijevi.

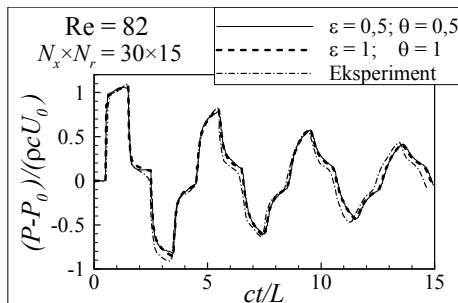
Sve korištene mreže imaju jednolik korak u aksijalnom (x) smjeru dok se u radijalnom smjeru korak povećava u geometrijskom nizu (kvocijent niza $q=1,05$) od stjenke cijevi prema unutrašnjosti. Zbog nestabilnosti proračunskog postupka nije u svim situacijama bilo moguće koristiti mješovite polu-implicitne sheme (tj. kombinacije $\varepsilon=0,5$; $\theta=0,5$ niti $\varepsilon=1$; $\theta=0,5$) od kojih se očekivala povećana točnost budući da su to sheme drugog reda točnosti. Koliko je stabilnost dozvoljavala, vrijednosti parametara ε i θ odabirane su ipak što bliže gornjim vrijednostima.

Na sl. 2 prikazan je tlak dobiven za situaciju laminarnog strujanja proračunat na relativno gruboj mreži ($N_x \times N_r = 30 \times 15$). Minimalna razlika dobivena korištenjem implicitne i polu-implicitne sheme primjećuje se samo u trenucima prolaska poremećaja, i tada implicitna metoda pokazuje veću točnost. Slični rezultati dobiveni su i korištenjem finijih mreža $N_x \times N_r = 30 \times 30$ (mješovita shema $\varepsilon=0,6$; $\theta=0,6$) i $N_x \times N_r = 60 \times 60$ (mješovita shema $\varepsilon=0,7$; $\theta=0,7$), jedino se u rezultatima dobivenim mješovitim shemama zamjećuju male nefizikalne oscilacije. Vrlo slični rezultati dobiveni su i na mreži $N_x \times N_r = 30 \times 30$ (mješovita shema $\varepsilon=1$; $\theta=0,5$).

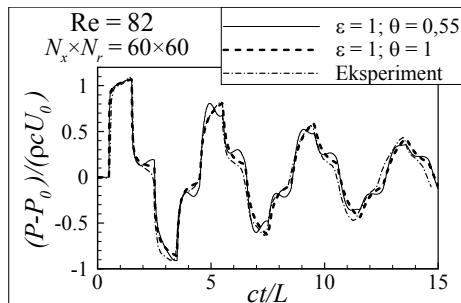
Na sl. 3 prikazan je tlak dobiven za situaciju laminarnog strujanja proračunat na relativno finoj mreži $N_x \times N_r = 60 \times 60$ (mješovita shema $\varepsilon=1$; $\theta=0,55$). Pogreške dobivene korištenjem mješovite sheme su znatne, oscilatornog su karaktera, pa se može pretpostaviti da je to zbog blizine granice stabilnosti.

Na sl. 4 prikazan je tlak dobiven za situaciju turbulentnog strujanja proračunat na mreži $N_x \times N_r = 30 \times 60$ (mješovita shema $\varepsilon=1$; $\theta=0,5$). Pogreške pri korištenju mješovite sheme su znatne i ponovo imaju oscilatorni karakter. Rezultati dobiveni korištenjem

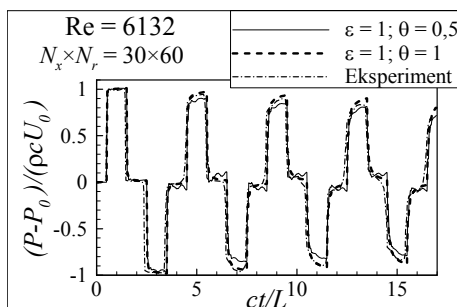
implicitne sheme i mješovite sheme ($\varepsilon=0,7$; $\theta=0,7$) na istoj mreži nemaju međusobnih zamjetnih razlika. Grublje mreže nisu korištene zbog zahtjeva za finijom mrežom uz stijenku cijevi kojeg postavlja model turbulencije.



Sl. 2 Tlak na sredini duljine cijevi, gruba mreža.



Sl. 3 Tlak na sredini duljine cijevi, finija mreža.



Sl. 4 Tlak na sredini duljine cijevi za slučaj turbulentnog strujanja.

6) ZAKLJUČAK

Za dvije situacije hidrauličkog udara za koje postoje eksperimentalni podaci o tlaku, u radu su uspoređeni rezultati dobiveni korištenjem potpuno implicitne sheme ($\varepsilon=\theta=1$) i mješovitih shema ($\varepsilon \neq 1$ i/ili $\theta \neq 1$). Očekivana veća točnost mješovite sheme (formalno to je diskretizacija višeg reda točnosti) nije uočljiva čak niti na relativno gruboj mreži. Radi održanja stabilnosti postupka, pokazalo se da na finijim mrežama treba povećavati parametre ε i θ (tj. shema mora biti sve bliže implicitnoj shemi). U rješenjima dobivenim pomoću mješovitih shema na finijim mrežama pojavljuju se nefizikalne oscilacije koje znatno narušavaju točnost.

Korištenje potpuno implicitne sheme nije niti u jednom slučaju zamjetno narušilo točnost rezultata. S druge strane, sukladno [4], korištenje implicitne sheme pokazalo se povoljno radi osiguranja stabilnost rješenja. Dobiveni rezultati upućuju na to da je upravo korištenje implicitne sheme preporučljivo, pa nemogućnost odabira drugih shema u skraćenoj metodi proračuna [3] u praksi ne predstavlja gubitak.

Literatura:

- [1] Holmboe, E.L.; Rouleau, W.T.: "The effect of viscous shear on transients in liquid lines", *J. of Basic Eng., Trans. ASME*, 89(1), 1967., str. 174-180.

- [2] Kita, Y.; Adachi, Y.; and Hirose, K: "Periodically oscillating turbulent flow in a pipe", *Bull. JSME*, 23(179), 1980., str. 656-664.
- [3] Korbar, R.: "*Prilog modeliranju koeficijenta otpora trenja u nestacionarnom strujanju fluida u cijevima*", Doktorski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2012.
- [4] Vardy, A. E.; Hwang, K.L.: "A characteristics model of transient friction in pipes", *J. Hydraul. Res.*, 29(5), 1991., str. 669-684.
- [5] Zhao, M.; Ghidaoui, M. S.: "Efficient quasi-two-dimensional model for water hammer problems", *J. Hydraul. Eng.*, 129(12), 2003., str. 1007-1013.

Autori:

Radoslav Korbar, Veleučilište u Karlovcu, Ivana Meštrovića 10, 47000 Karlovac, tel. 091/7809668, fax 047/843503, e-mail: rkorbar@vuka.hr,

Ivan Korade, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: ivan.korade@fsb.hr,

Nenad Mustapić, Veleučilište u Karlovcu, Ivana Meštrovića 10, 47000 Karlovac, e-mail: nenad.mustapic@vuka.hr.